POROVNANIE MODELOV GARCH, GJR-GARCH A E-GARCH V SÚVISLOSTI S ANALÝZOU AKCIOVÉHO TRHU

COMPARISON OF MODELS GARCH, GJR-GARCH AND E-GARCH IN CONNECTION WITH STOCK MARKET ANALYSIS

Abstrakt

Volatilita výnosov ako ukazovateľ zisku alebo straty je základnou mierou rizikovosti finančných aktív. Vo všeobecnosti existuje niekoľko prístupov k jej modelovaniu. Prvým a základným, je modelovanie pomocou historickej volatility výnosov. Ten však nie je v súčasnosti postačujúci, preto bolo potrebné vytvoriť také modely, ktoré by dokázali s veľkou presnosťou modelovať volatilitu výnosov, a tým aj samotný výnos daného aktíva. Jedná sa najmä o modely GARCH, GJR-GARCH a E-GARCH. Cieľom príspevku je porovnanie spomenutých jednorozmerných modelov, ktoré použijeme na modelovanie volatility výnosov pre akcie vybranej spoločnosti. K analýze nám dopomôže programovací jazyk R.

JEL: G 12, G 15

Kľúčové slová: akcie, GARCH, GJR-GARCH, E-GARCH

Abstract

The volatility of returns, as an indicator of profit or loss, is a basic measure of the riskiness of financial assets. In general, there are several approaches to its modeling. The first approach is modeling using historical volatility of returns. However, it is currently not sufficient, therefore it was necessary to create models that could model the volatility of returns and thus the return of the given asset with great accuracy. These are mainly GARCH, GJR-GARCH and E-GARCH models. The aim of the paper is to compare the mentioned one-dimensional models, which we will use to model the volatility of returns for the stocks of the selected company. The programming language R will help us to analyze the data.

Keywords: stocks, GARCH, GJR-GARCH, E-GARCH

1 JEDNOROZMERNÉ LINEÁRNE MODELY

Po prvýkrát myšlienku lineárnych modelov vyslovil americký ekonóm, nositeľ Nobelovej ceny za ekonómiu, Robert Franklin Engle. V 80. rokoch 20. storočia nimi modeloval vývoj inflácie vo Veľkej Británii. Dnes patria tieto modely (a najmä zovšeobecnený model GARCH) medzi základné nástroje na modelovanie finančných časových radov. Vychádzajú z dvoch predpokladov, a to [2]:

- modely finančných časových radov považujeme za heteroskedastické, čo znamená, že volatilita výnosov sa mení v čase,
- volatilita výnosov je jednoduchou kvadratickou funkciou predpovedaných minulých chýb (odchýlok od podmienenej strednej hodnoty) e_t.

Druhý predpoklad vychádza zo zhlukovania volatility výnosov, kedy väčšie (resp. menšie) výkyvy vo finančnom časovom rade očakávame po väčších (resp. menších) predchádzajúcich výkyvoch. Na základe tejto charakteristiky považujeme volatilitu výnosov za autokorelovanú a ako najjednoduchší spôsob pre jej modelovanie je vhodné zvoliť autoregresný model. Platí:

$$E(e_t) = 0\,, \qquad potom \qquad \sigma_t^2 = var(e_t|\Omega_{t-1}) = E(e_t^2|\Omega_{t-1}) \approx e_t^2 \qquad (1)$$

Jednorozmerné a viacrozmerné modely sa najčastejšie používajú na odhad volatility výnosov akcií. Na základe získaných informácií určujú ceny, predpovedajú, ktoré aktívum potenciálne prinesie vyšší výnos alebo či daná investícia prinesie zisk. Ich využitie je dôležité pri alokácii kapitálu, hedgingu, riadení rizík a optimálnom nastavení portfólia.

V lineárnych modeloch rozptyl predstavuje lineárnu funkciu štvorcov rezíduí, preto tieto modely a ďalej aj modely z nich odvodené definujeme ako lineárne modely volatility výnosov.

Model ARCH (Autoregressive Conditionally Heteroscedasticity) bol vytvorený na riešenie ekonometrických a finančných problémov, ktoré súvisia s pohybujúcou sa cenou aktíva za určité časové obdobie. Tento model sa bežne používa pri modelovaní finančných časových radov, dokáže zachytiť typickú vlastnosť volatility výnosov, a to zhlukovanie (volatility clustering). Volatilita výnosov alebo podmienený rozptyl v tomto modeli predstavuje funkciu štvorcov chýb z predchádzajúcich období, odchýlok od podmienenej strednej hodnoty.

Najjednoduchším lineárnym modelom triedy ARCH je model ARCH(1), ktorý je daný vzťahom:

$$y_t = \mu_t + e_t\,, \qquad e_t = \sigma_t \varepsilon_t\,, \qquad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 \qquad (2)$$

kde α_0, α_1 sú parametre modelu, pričom platí, $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$. Tieto podmienky zaručia kladnú hodnotu podmieneného rozptylu σ_t^2.

Rovnica (2) je tvorená dvomi zložkami, a to konštantou a členom ARCH, ktorý predstavuje informáciu o volatilite výnosov z predchádzajúceho obdobia.

Zovšeobecnením predošlého modelu dostávame model ARCH(m), ktorý je vyjadrený nasledujúcim vzťahom:

$$\begin{gathered} y_t = \mu_t + e_t\,, \qquad e_t = \sigma_t \varepsilon_t\,, \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \alpha_2 e_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m e_{t-m}^2 \end{gathered} \tag{3}$$

kde ak splníme podmienky $\alpha_0 > 0, \alpha_m \geq 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, m$ dostaneme kladnú hodnotu podmieneného rozptylu σ_t^2.

Cipra identifikuje viacero nedostatkov modelu ARCH(m), medzi ktoré môžeme zaradiť napr. [2]:

- model obvykle vyžaduje vysoký rad m, aby adekvátne popísal vývoj volatility výnosov v danom časovom rade,
- s predchádzajúcim bodom je spojený fakt, že so zvyšujúcim sa radom m je nutné odhadnúť viacero parametrov, kedy ale môže prísť u niektorého z parametrov k porušeniu podmienky nezápornosti,
- v modeli síce je zohľadnené zhlukovanie volatility, nevýhodou však je, že model ARCH(m) nedokáže zachytiť pákový efekt alebo asymetriu, kedy kladné alebo záporné odchýlky e_t môžu mať odlišný vplyv na volatilitu výnosov.

Vylepšený model ARCH predstavuje **model GARCH** (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity), ktorý navrhol dánsky ekonóm Tim Bollerslev. Pri modifikáciách tohto modelu môže volatilita výnosov (t. j. podmienený rozptyl) závisieť na predchádzajúcich hodnotách.

Najjednoduchším a vo finančnej praxi najpoužívanejším modelom tejto triedy je model GARCH(1,1), a to najmä vďaka možnosti popísať volatilitu výnosov prostredníctvom troch parametrov. Definujeme podmienený rozptyl pre tento model:

$$\begin{gathered} y_t = \mu_t + e_t\,, \qquad e_t = \sigma_t \varepsilon_t\,, \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{gathered} \tag{4}$$

kde je podmienený rozptyl σ_t^2 kladný, ak sú splnené podmienky $\alpha_0 > 0, \alpha_1, \beta_1 \geq 0, \alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Ako sme uviedli, model ARCH(1) znamená, že v modeli sa nachádza člen ARCH prvého radu. V prípade modelu GARCH zápis (1,1) znamená, že v modeli máme prítomnosť ARCH členu prvého radu a GARCH členu prvého radu.

Model so zápisom GARCH(m,s) predstavuje zovšeobecnený Bollerslevov model, pričom m vyjadruje rad člena ARCH a s rad člena GARCH. Podmienený rozptyl v tomto modeli vypočítame nasledovne:

$$y_t = \mu_t + e_t\,, \qquad e_t = \sigma_t \varepsilon_t\,,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{5}$$

kde pre nezáporný podmienený rozptyl musia byť splnené podmienky $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ pre $i = 1, 2, \dots, m$ a $\beta_j \geq 0$ pre $j = 1, 2, \dots, s$. Ak $s = 0$ proces sa upraví na ARCH(m) model.

Tak ako modely ARCH, tak aj všeobecné modely (GARCH) majú v praxi mnohostranné využitie. Finanční odborníci často uprednostňujú model GARCH, pretože poskytuje komplexnejší pohľad než iné modely.

2 JEDNOROZMERNÉ NELINEÁRNE MODELY

Slabou stránkou všeobecného GARCH modelu je neschopnosť modelovať asymetrické chovanie výnosov, kedy kladné a záporné odchýlky (chyby) majú odlišný vplyv na volatilitu výnosov. Túto skutočnosť popisuje pákový efekt, kedy informácie o rastúcej volatilite výnosov znižujú dopyt po danom aktíve z dôvodu averzie voči riziku. Z toho vyplýva, že pri poklese výnosov volatilita rastie výraznejšie ako klesá pri ich náraste.

2.1 MODEL GJR-GARCH

Modifikáciou modelu GARCH vznikol **model GJR-GARCH**, ktorý navrhli Glosten, Jagannathan a Runkle v roku 1993 a nezávisle od nich v roku 1994 Zakoian. Tento model sa v literatúre označuje aj ako hraničný alebo prahový GARCH model (Threshold GARCH).

Najpoužívanejší model GJR-GARCH je definovaný vzťahom:

$$y_t = \mu_t + e_t\,, \qquad e_t = \sigma_t \varepsilon_t\,,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 e_{t-1}^2 I_{t-1}^-\,, \qquad I_t^- = \begin{cases} 1\; pre\; e_t < 0 \\ 0\; inak \end{cases} \tag{6}$$

Hlavná myšlienka GJR-GARCH modelu spočíva v tom, že dopad „dobrých správ“ na akciovom trhu ($e_{t-1} > 0$) modelovaný prostredníctvom α_i je odlišný od dopadu „zlých správ“ ($e_{t-1} < 0$) modelovaného pomocou $\alpha_1 + \gamma_1$. Ak platí $\gamma_1 > 0$, „zlé správy“ spôsobujú rast volatility, tzn. že je prítomný pákový efekt.

2.2 MODEL E-GARCH

Podľa Nelsona **E-GARCH** (Exponential GARCH) **model** odstraňuje mnohé nedostatky GARCH modelu, akými sú napríklad vyššie spomínaný pákový efekt. Model GARCH teda nie je schopný pracovať s asymetrickým rozdelením finančných výnosov.

Hlavný rozdiel je v tom, že podmienený rozptyl je vyjadrený logaritmom, čo prináša výhodu, že získame nezáporný rozptyl, a teda nemusíme dodatočne špecifikovať ďalšie podmienky.

Najpoužívanejší model EGARCH vyjadríme v tvare:

$$y_t = \mu_t + e_t\,, \qquad e_t = \sigma_t \varepsilon_t\,,$$
$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \left|\frac{e_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right| + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 \frac{e_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \tag{7}$$

3 POROVNANIE MODELOV

Pri porovnaní využijeme primárne informačné kritéria a krivku šokov, ale aj graf historickej volatility výnosov, ktorú porovnáme s modelovanou volatilitou výnosov prostredníctvom modelov GARCH, GJR-GARCH a E-GARCH. Na analýzu využijeme programovací jazyk R. Pracovať budeme s akciami spoločnosti Apple Inc. (označenie symbolom AAPL), pričom finančné dáta sledujeme v časovom horizonte sedemnástich rokov od 1. januára 2006 do 31. decembra 2022. Pracovať budeme s dennými údajmi. V praktickej ukážke vychádzame zo zdrojov [1], [3], [4] a [5].

3.1 Porovnanie na základe informačných kritérií

Na porovnanie modelov použijeme AIC kritérium (Akaike Information Criterion) a BIC kritérium (Bayes Information Criterion).

Akaikovo informačné kritérium predstavuje číslo na základe ktorého dokážeme určiť, ktorý z vybraných modelov je s veľkou pravdepodobnosťou najlepším modelom pre danú množinu údajov, v našom prípade finančný časový rad. AIC teda netestuje model prostredníctvom hypotéz, ale porovnáva jednotlivé modely medzi sebou. Tie sú následne podľa tohto parametra zoradené a model s najnižšou hodnotou AIC je považovaný za najlepší.

Bayesovské informačné kritérium sa udáva ako index, ktorý porovnáva rôzne modely a vyberie z nich (podobne ako AIC kritérium), ten najlepší s najnižšou hodnotou indexu. BIC vyvinul Gideon E. Schwarz v roku 1978, preto sa v literatúre nazýva aj Schwarzovo informačné kritérium (SIC).

Tab. 1: AIC a BIC hodnoty pre akcie AAPL. Zdroj: vlastné spracovanie

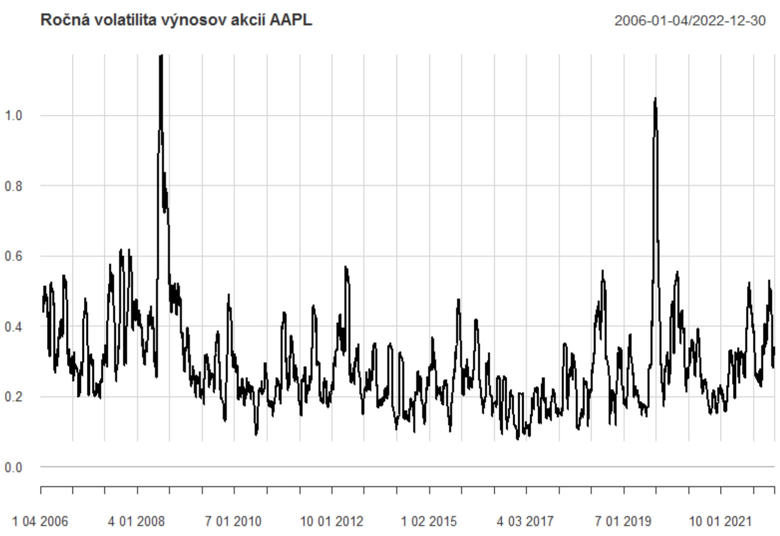
	Typ modelu	AIC	BIC
Akcie AAPL	GARCH(1,1)	-5,1519	-5,1453
	GJR-GARCH(1,1)	-5,1754	-5,1671
	E-GARCH(1,1)	-5,1834	-5,1751

V Tab. 1 sú uvedené hodnoty AIC a BIC pre jednotlivé modifikácie GARCH modelov. Na základe kritérií vidíme, že najvhodnejšou možnosťou je exponenciálny GARCH model, pre ktorý vyšli hodnoty AIC a BIC najmenšie.

Výpočet volatility výnosov prostredníctvom historického prístupu je v dnešnej dobe nepostačujúci a v mnohých prípadoch aj veľmi nevyspytateľný. Vo všeobecnosti ale investorovi ponúka približný pohľad na zmenu výnosov daného aktíva. Historickú volatilitu výnosov určujeme ako štandardnú odchýlku výnosov a prepočítavame ju na ročnú.

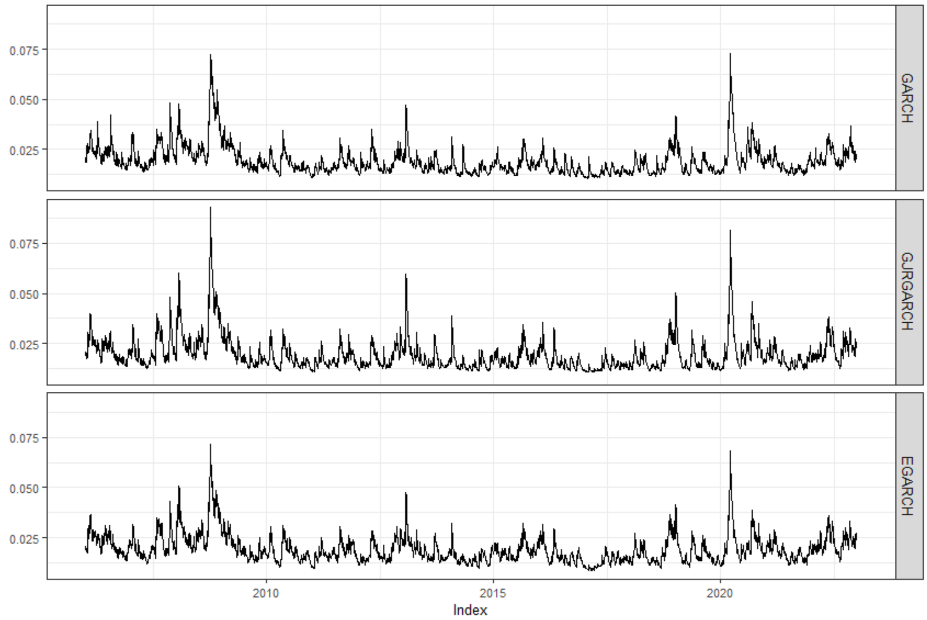
Prostredníctvom programovacieho jazyka R vykreslíme graf historickej volatility denných logaritmických výnosov pre akcie AAPL. (Obr. 1)

Na základe vytvorených modelov GARCH, GJR-GARCH a E-GARCH vytvoríme graf modelovanej volatility denných logaritmických výnosov pre tie isté akcie. (Obr. 2)



Obr. 1: Historická volatilita denných logaritmických výnosov pre akcie AAPL. Zdroj: vlastné spracovanie

Pri pozorovaní vyššie uvedených obrázkov (Obr. 1 a Obr. 2) vidíme, že veľké výkyvy volatility výnosov od jej priemernej hodnoty nastali v roku 2008 (globálna hospodárska kríza) a v roku 2020 (globálna pandemická kríza). Z Obr. 2. je zrejmé, že model GJR-GARCH, tak ako popisuje literatúra, reaguje odlišne na dobré a zlé správy na akciovom trhu, čo znamená, že práve zlé správy spôsobujú rast volatility.



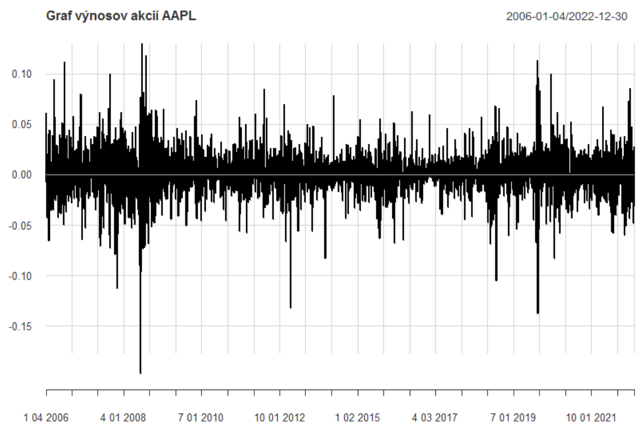
Obr. 2: Modelovaná volatilita denných logaritmických výnosov pre akcie AAPL. Zdroj: vlastné spracovanie

3.2 Porovnanie na základe krivky šokov

Štandardný GARCH model dokáže zachytiť zhlukovanie volatility, ale na prítomnosť asymetrie spôsobenej pákovým efektom je potrebné zvoliť pokročilejší model. Asymetriu dokážeme vizuálne zachytiť prostredníctvom krivky dopadu šokov (News Impact Curve), ktorú zaviedli Pagan a Schwert v roku 1990. Táto krivka je schopná vizuálne zachytiť šok na akciovom trhu, a tým môže výstižne vyjadriť asymetrické účinky volatility.

Model GARCH

Obr. 3 zobrazuje denné výnosy akcií AAPL. Ďalej na obrázku vidíme zhlukovanie volatility, kde veľké zmeny nasledujú ďalšie veľké zmeny, a naopak malé zmeny nasledujú po malých zmenách.



Obr. 3: Graf výnosov akcií AAPL. Zdroj: vlastné spracovanie

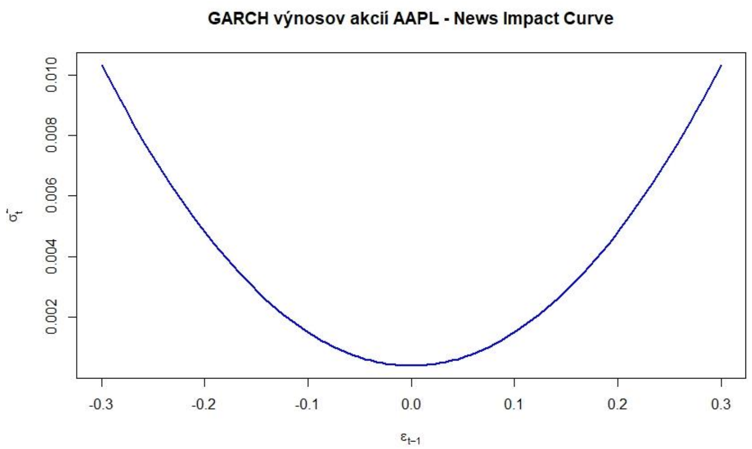
Na obr. 4 pozorujeme výstup modelu a taktiež odhad jeho parametrov.

```
Coefficient(s):
        mu       omega      alpha1       beta1
1.9338e-03  1.3398e-05  1.1049e-01  8.5974e-01

Std. Errors:
 based on Hessian

Error Analysis:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu     1.934e-03   2.689e-04    7.191 6.45e-13 ***
omega  1.340e-05   2.111e-06    6.346 2.21e-10 ***
alpha1 1.105e-01   1.295e-02    8.534  < 2e-16 ***
beta1  8.597e-01   1.480e-02   58.107  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Obr. 4: Odhad parametrov modelu GARCH(1,1). Zdroj: vlastné spracovanie

Na Obr. 4 vidíme, že všetky parametre sú štatisticky významné, a to na základe p-hodnoty. Rovnicu modelu prostredníctvom vzorca (4) vyjadríme nasledovne.

$$y_t = 0{,}001934 + e_t\,, \qquad e_t = \sigma_t \varepsilon_t\,,$$
$$\sigma_t^2 = 0{,}0000134 + 0{,}1105 e_{t-1}^2 + 0{,}8597 \sigma_{t-1}^2 \tag{8}$$



Obr. 5: Model GARCH výnosov akcií AAPL – News Impact Curve. Zdroj: vlastné spracovanie

Ako sme predpokladali, z Obr. 5 je zrejmé, že model GARCH nezachytil asymetriu v reakcii na kladné a negatívne šoky.

Model GJR-GARCH

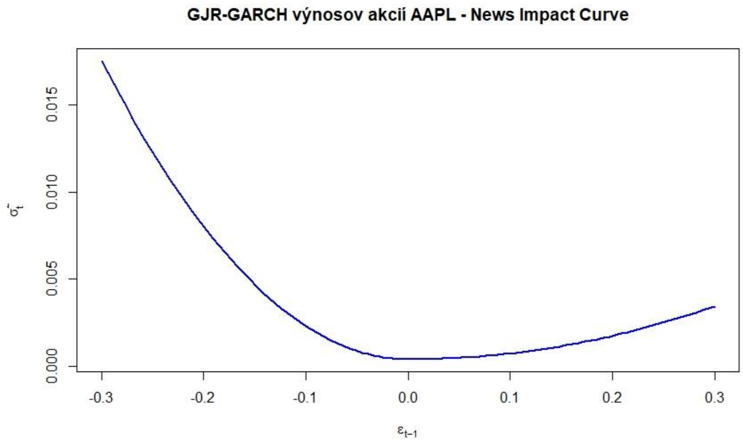
V nasledujúcej časti odhadneme model GJR-GARCH(1,1) pre finančné dáta spoločnosti Apple Inc. Pomocou programovacieho jazyka R získame odhad jednotlivých parametrov modelu. (Obr. 6)

Všetky parametre sú na základe p-hodnoty štatisticky významné. Podľa vzorca (6) môžeme parametre dosadiť do rovnice.

$$\sigma_t^2 = 0{,}001490 + 0{,}033895 e_{t-1}^2 + 0{,}854183 \sigma_{t-1}^2 + 0{,}156682 e_{t-1}^2 I_{t-1}^- \qquad (9)$$

```
Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.001490    0.000230   6.4696        0
omega   0.000015    0.000002   9.2228        0
alpha1  0.033895    0.005599   6.0534        0
beta1   0.854183    0.008636  98.9065        0
gamma1  0.156682    0.017360   9.0253        0
```

Obr. 6: Odhad parametrov modelu GJR-GARCH(1,1). Zdroj: vlastné spracovanie



Obr. 7: Model GJR-GARCH výnosov akcií AAPL – News Impact Curve. Zdroj: vlastné spracovanie

Krivka na Obr. 7 naznačuje, že model GJR-GARCH zachytáva asymetriu. V tomto prípade vplyv negatívnych šokov na akciovom trhu má vyšší dopad na vývoj volatility výnosov, než prítomnosť kladných správ.

Model E-GARCH

Model E-GARCH na rozdiel od všeobecného modelu GARCH taktiež dokáže zachytiť asymetrický efekt. Ak je koeficient α_1 rôzny od nuly, v modeli je prítomná asymetria. Navyše ak je tento koeficient záporný, môžeme hovoriť o pákovom efekte, čo predikuje, že v modeli je prítomných viac negatívnych šokov ako kladných. Pomocou programovacieho jazyka R získame odhad jednotlivých koeficientov modelu, ktoré sú zobrazené na Obr. 8.

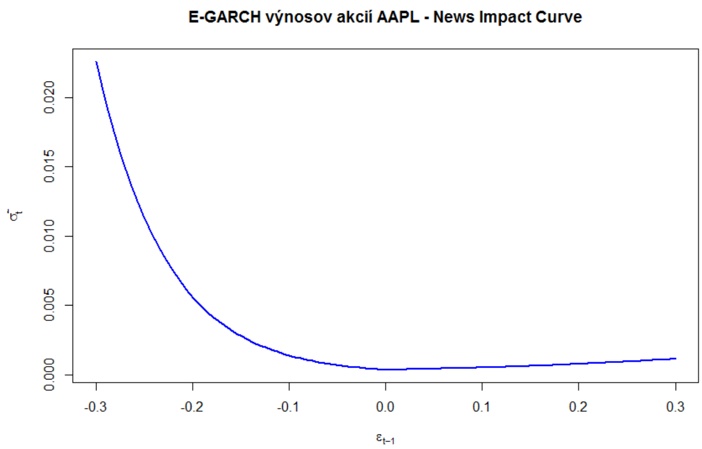
```
Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.001478    0.000240   6.1646        0
omega  -0.320494    0.032723  -9.7940        0
alpha1 -0.102286    0.010409  -9.8265        0
beta1   0.958962    0.004076 235.2911        0
gamma1  0.186223    0.014681  12.6850        0
```

Obr. 8: Odhad parametrov modelu E-GARCH(1,1). Zdroj: vlastné spracovanie

Všetky parametre modelu E-GARCH sú podľa p-hodnoty štatisticky významné. Z výstupu je zrejmé, že parameter α_1 nadobúda záporné hodnoty, tzn. že v danom finančnom časovom rade je prítomný pákový efekt. Podľa vzorca (7) má rovnica nasledujúci tvar.

$$y_t = 0{,}001478 + e_t\,, \qquad e_t = \sigma_t \varepsilon_t\,,$$
$$\ln(\sigma_t^2) = -0{,}320494 - 0{,}102286\left|\frac{e_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right| + 0{,}958962 \ln \sigma_{t-1}^2 + + 0{,}186223\frac{e_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \tag{10}$$

Ako bolo spomenuté, asymetria časového radu v modeli E-GARCH je zachytená prostredníctvom parametra α_1. Ak je záporný, finančný časový rad reaguje viac na negatívne šoky. Na základe Obr. 9 vidíme, že model E-GARCH akcií AAPL skutočne reaguje na asymetriu. Navyše oproti GJR-GARCH, model E-GARCH výrazne slabšie reaguje na prítomnosť kladných šokov na akciovom trhu.



Obr. 9: Model E-GARCH výnosov akcií AAPL – News Impact Curve. Zdroj: vlastné spracovanie

4 ZÁVER

Na základe informačných kritérií sme dospeli k záveru, že najvhodnejším modelom pri modelovaní volatility výnosov akcií AAPL je nelineárny model E-GARCH, pri ktorom ako AIC, tak aj BIC kritérium vyšlo najmenšie. Tento model, ako aj model GJR-GARCH, dokáže zachytiť asymetriu prítomnú vo finančnom rade. Danú skutočnosť potvrdila aj krivka šokov, ktorá pri všeobecnom modeli GARCH predstavovala symetrickú parabolu, t. j. v tomto modeli nebola prítomná asymetria. Volatilita výnosov ako ukazovateľ zisku alebo straty je základnou mierou rizikovosti finančných aktív. Poukázali sme taktiež aj na porovnanie volatility výnosov prostredníctvom historického prístupu a modelovanej volatility výnosov pomocou vyššie spomenutých jednorozmerných modelov. Historická volatilita výnosov v súčasnosti nepostačuje, pretože jednorozmerné modely dokážu zachytiť viaceré faktory, ktoré na ňu vplývajú.

Zdroje

1. BERLINGER, E. a kolektív. Mastering R for Quantitative Finance. Birmingham: Packt Publishing, 2015. 364 s. ISBN 978-1-78355-207-8
2. CIPRA, T. Finanční ekonometrie. Praha: Ekopress s.r.o., 2013. 538 s. ISBN 978-80-86929-93-4
3. KADEROVÁ, Andrea, Zuzana KRÁTKA a Michal PÁLEŠ. Volatility Modelling in Market Risk Analysis. Journal of Applied Economic Sciences. Craiova: Spiru Haret University, 2018, 787-796. ISSN 2393-5162
4. R CORE TEAM. R: A language and enviroment for statistical computing [elektronický zdroj]. Viedeň, 2019. Dostupné na: https://www.R-project.org/
5. STEHLÍKOVÁ, B. Modelovanie volatility – ARCH a GARCH modely [elektronický zdroj]. Dostupné na: http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/cr17/slajdy/07_garch.pdf
6. ZÁVODNÝ, M. Modelovanie volatility výnosov akcií. [diplomová práca]. Ekonomická univerzita v Bratislave.

Kontaktné údaje

Ing. Michal Závodný

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemská cesta 1, Bratislava 852 35, Slovensko

E-mail: michal.zavodny@euba.sk